

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СРЕДЕ GEOGEBRA: РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Бухарина А.А., ассистент,
ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева», г. Орел, Россия

Аннотация. В статье рассматривается вопрос использования среды Geogebra на занятиях по аналитической геометрии. Описаны преимущества включения информационных технологий в образовательный процесс. Предложены задачи, решение которых может быть проиллюстрировано при помощи Geogebra.

Ключевые слова: информационные технологии, среда Geogebra, пространственное мышление студентов, аналитическая геометрия.

Формирование пространственного мышления студентов является важнейшим аспектом их обучения, необходимым для дальнейшей успешной профессиональной деятельности. И. С. Якиманская определяет пространственное мышление как специфический вид мыслительной деятельности, включаемой при решении задач, требующих ориентации в пространстве [3]. Анализ пространственных свойств и отношений реальных объектов и их графических изображений служит опорой для выстраивания мысленных образов. Пространственное мышление необходимо любому человеку, независимо от его профессиональной области, но особенно важно оно для специалистов технических направлений, в инженерии, математике, физике, архитектуре и дизайне.

Аналитическая геометрия играет важнейшую роль в развитии пространственного мышления. Она помогает исследовать геометрические объекты методами алгебры, устанавливать связь между числами и формами. Использование системы координат позволяет определить точное положение точек, линий и поверхностей в пространстве, помогая развивать навыки ориентации и распознавания взаимного расположения объектов. Анализ

уравнений кривых и поверхностей углубляет знания о свойствах геометрических фигур. Применение аналитической геометрии в инженерных дисциплинах, архитектуре и физике демонстрирует значимость пространственных представлений в реальной жизни и профессиональной деятельности.

Современные информационные технологии существенно облегчают работу по формированию пространственного мышления студентов. Они позволяют визуализировать сложные геометрические формы, облегчают восприятие сложных концепций и способствуют формированию умения мысленно модернизировать объекты в пространстве, отслеживать их динамику, наблюдать за изменением объекта в связи с корректировкой отдельных параметров.

Среди различных инструментов можно выделить компьютерные программы для моделирования (AutoCAD, Blender и др.), игровые симуляторы и образовательные игры (например, Minecraft), технологии виртуальной и дополненной реальности, средства для анимации и графического дизайна (Adobe Illustrator, CorelDRAW), интерактивные онлайн-тренажеры (Coursera, Stepik, Geogebra, Khan Academy).

Отдельно отметим GeoGebra, эффективный инструмент для обучения математике, в частности, аналитической геометрии. Эта программа представляет собой уникальный комплекс, объединяющий возможности разных математических сервисов. Отличительной особенностью среды является интерактивность: Geogebra позволяет иллюстрировать связь между функциями, показывать изменение положения объекта, двигать графики, находить новые точки пересечения и т.д. Пользователь имеет возможность строить линии, окружности, многоугольники, поверхности, объемные тела, вращать чертежи, исследуя их признаки и свойства. Среда предоставляет возможность вводить уравнения вручную или при помощи встроенной клавиатуры программы, использовать любые математические символы, делать необходимые текстовые пометки прямо на рисунке. Программа легко интегрируется в учебный процесс,

помогает облегчить процесс визуализации геометрических объектов, ускоряет решение задач за счет быстрой наглядной демонстрации чертежа.

Перечислим типы упражнений, решение которых способствует успешному формированию пространственных представлений:

- упражнения, требующие исследования свойств геометрических объектов;
- упражнения, в которых нужно изобразить геометрические конфигурации по определенным свойствам;
- упражнения, сводящие к преобразованиям образов геометрических объектов;
- упражнения, требующие конструирования новых геометрических объектов [1].

Все они могут быть решены при помощи Geogebra. Педагогу необходимо предварительно изучить весь инструментарий программы, освоить ее возможности, убедиться в том, что оборудование учебного кабинета поддерживает работу с Geogebra. Можно использовать среду различными способами, наиболее простым является применение для иллюстрации объяснения нового материала, построения чертежей при решении задач или исследования и проверки решения. Интерфейс достаточно понятен для использования, поэтому представляется возможным познакомить студентов с возможностями программы и дальнейшего самостоятельного применения. Индивидуальные консультации и помощь будут полезны тем, кому трудно сразу разобраться с возможностями инструмента.

При организации работы студентов с Geogebra важно уделять внимание сущности выполняемых действий, необходимо регулярно контролировать понимание материала путем устных вопросов, практических заданий и тестов. Педагог должен следить за балансом между применением компьютерных технологий и ручными вычислениями, построениями графиков и чертежей вручную, в тетради. Geogebra только средство для упрощения некоторых процессов, но не замена привычным методам.

Рассмотрим пример 1. Установить взаимное расположение прямых:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \text{ и } \begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$$

Перейдём от канонической к параметрической форме записи. Из $\frac{x-2}{4} =$

$$\frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \text{ получим } \begin{cases} x = 2 + 4k, \\ y = 3k, \\ z = -1 - 2k. \end{cases} \text{ Направляющие векторы для прямых } \vec{s}_1(4; 3; -2)$$

и $\vec{s}_2(-8; -6; 4)$ соответственно. Составим отношения координат $\frac{4}{-8} = \frac{3}{-6} = \frac{-2}{4}$.

Из составленного выражения видно, что координаты пропорциональны, значит прямые параллельны или совпадают. Выберем произвольную точку, принадлежащую первой прямой, например, $A(2; 0; -1)$. Подставим координаты

точки A в уравнение второй прямой $\begin{cases} 2 = 5 - 8t, \\ 0 = 4 - 6t, \\ -1 = 3 + 4t. \end{cases}$, найдем t . Из первого

уравнения системы $t = \frac{3}{8}$, из второго получим $t = \frac{2}{3}$, из третьего уравнения находим $t = -1$. Делаем вывод, что точка A не принадлежит второй прямой, значит, они не совпадают, следовательно параллельны [2, с. 200].

Решим ту же задачу при помощи Geogebra: введем уравнения прямых, на поле «3dграфика» получим изображения(рисунок 1). Можно вращать чертеж, с разных сторон рассматривая полученные прямые.

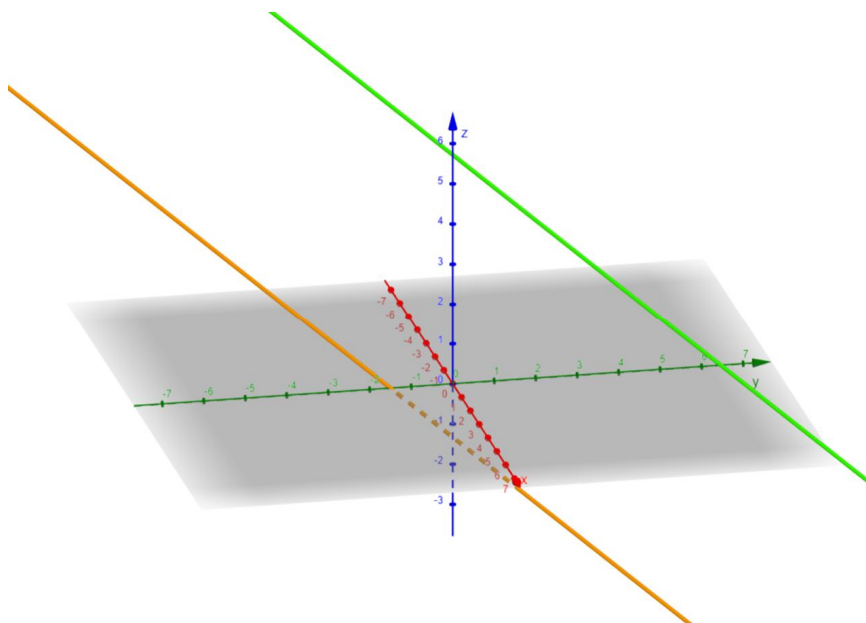


Рисунок 1 – Решение примера 1 при помощи среды Geogebra

Убедиться в параллельности прямых можно, взяв на одной из прямых две произвольные точки (Е и F на рисунке 2) и измерив расстояние от точек до второй прямой.

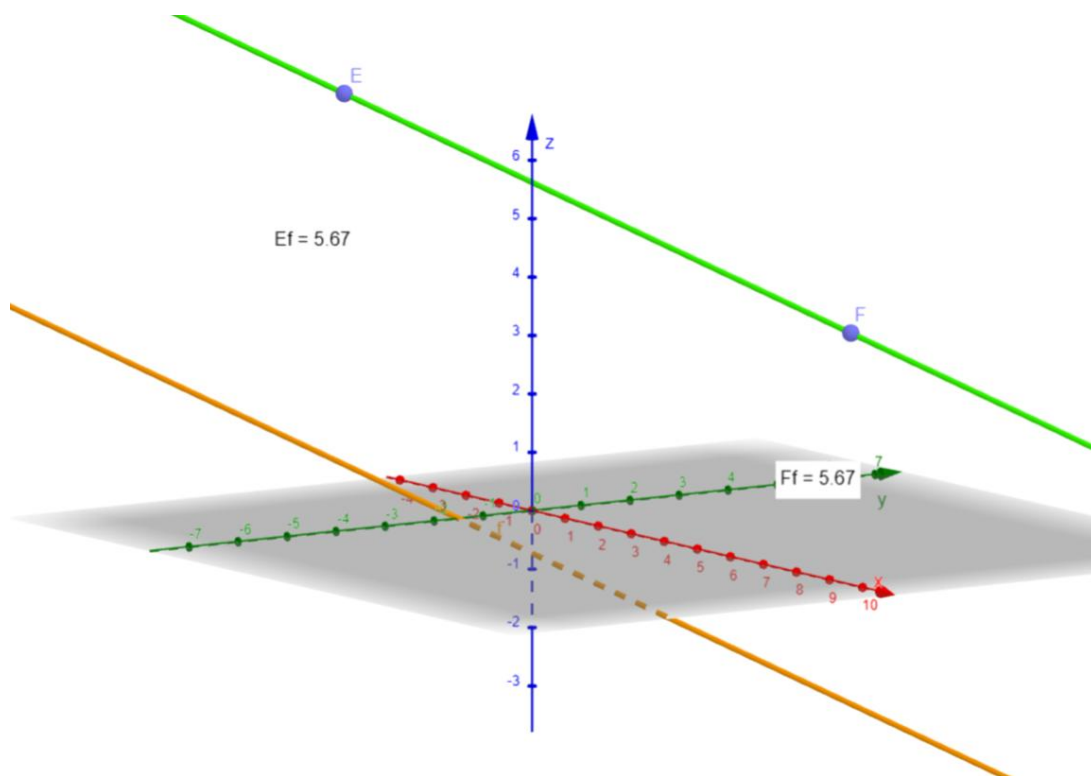


Рисунок 2 – Проверка решения примера 1 при помощи среды Geogebra

Построение прямых вручную не представляет серьезных трудностей.

Поэтому рассмотренная задача достаточно легко решается и аналитически, без использования вспомогательных информационных технологий. При изучении аналитической геометрии в пространстве особенно сложной темой являются поверхности второго порядка, в том числе и из-за того, что достаточно трудно наглядно их изобразить на листе бумаги. Рассмотрим пример 2. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x - 3y - 2z - 35 = 0$ и $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, если ее центр расположен на прямой $\frac{x-11}{6} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{-2}$ [2, с. 214].

Перейдём от канонической к параметрической форме записи, получим

$$\begin{cases} x = 11 + 6t, \\ y = -4 - 3t, \\ z = -3 - 2t. \end{cases}$$

Подставим данные уравнения в уравнения плоскостей, найдем t_1 и t_2 .

$$6(11 + 6t_1) - 3(-4 - 3t_1) - 2(-3 - 2t_1) - 35 = 0, t_1 = -1,$$

$$6(11 + 6t_1) - 3(-4 - 3t_1) - 2(-3 - 2t_1) + 63 = 0, t_2 = -3.$$

Возвращая значения параметра в уравнение прямой, найдем координаты точек пересечения прямой с плоскостями: $A_1(5; -1; -1), A_2(-7; 5; 3)$.

Центр сферы будет располагаться в середине отрезка A_1A_2 .

$A(\frac{5-7}{2}; \frac{-1+5}{2}; \frac{-1+3}{2}), A(-1; 2; 1)$. Радиус сферы

$$R = AA_1 = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-1 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7.$$

Получим уравнение сферы: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 49$.

Решим задачу, воспользовавшись инструментами Geogebra. Построим исходные объекты: две плоскости и прямую (рисунок 3).

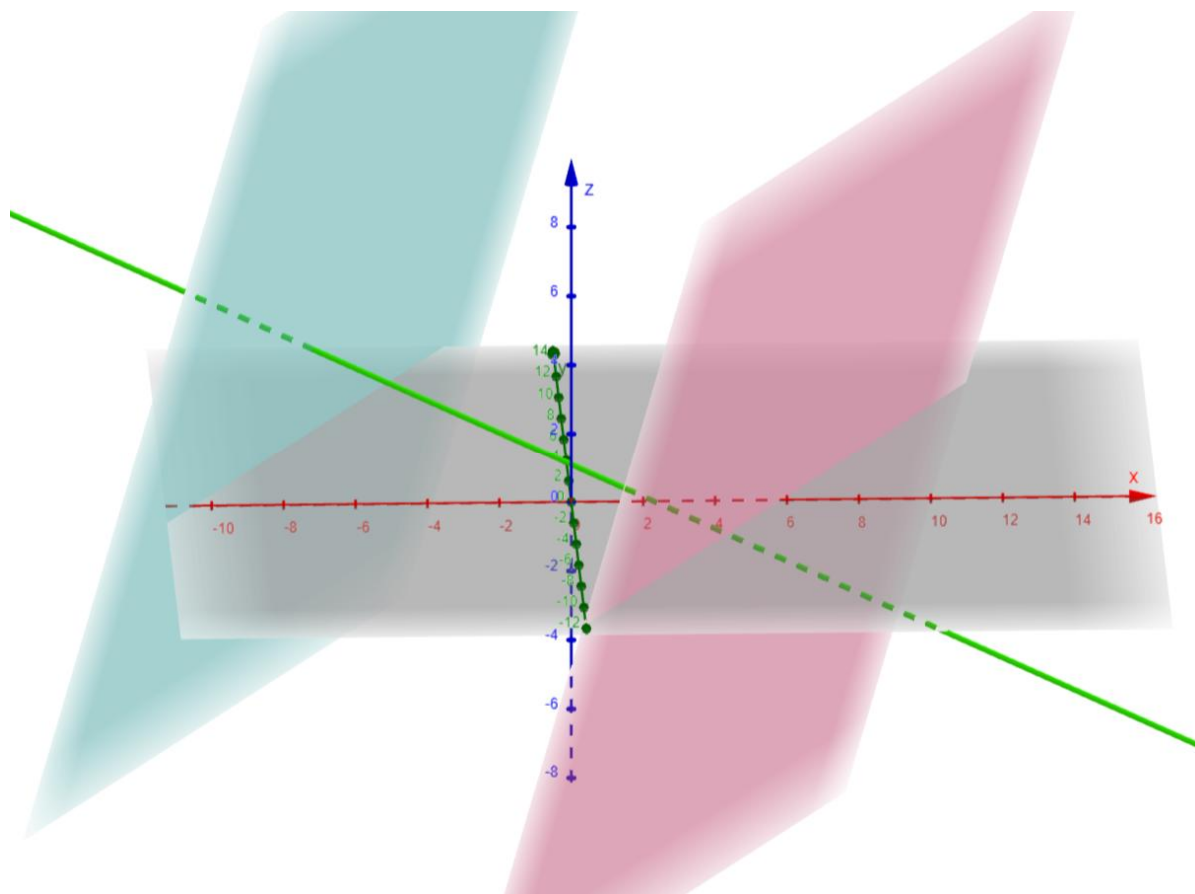


Рисунок 3 – Построение исходных данных примера 2 при помощи среды Geogebra

Найдем точки пересечения плоскостей с прямой, для этого применяем встроенные функции среды. При помощи команды «Середина или центр» определим точку, находящуюся на равном расстоянии от плоскостей. Построим сферу. Вращая чертеж (рисунок 4), убеждаемся в выполнении всех условий. В левой части экрана видим искомое аналитическое уравнение сферы.

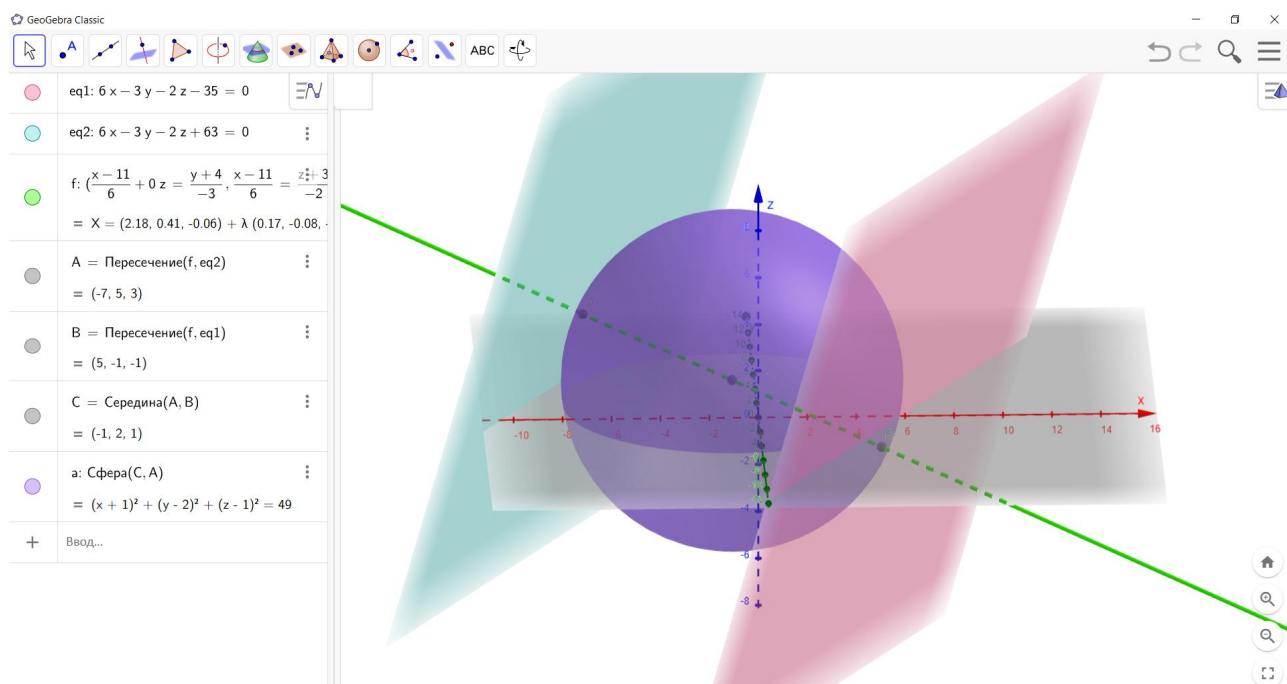


Рисунок 4 – Решение примера 2 при помощи среды Geogebra

Geogebra обеспечивает комплексный подход к формированию пространственного мышления студентов, является мощным инструментом, способствующим активному обучению геометрии благодаря своей интерактивности и визуализации сложных объектов. Применение информационных технологий в процессе обучения имеет ряд преимуществ и позволяет сделать обучение более эффективным и увлекательным.

Литература

1. Кобесашвили Н. Л. Формирование пространственного мышления у студентов технического вуза // Проблемы современного педагогического образования. 2020. №69-2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-prostranstvennogo-myshleniya-u-studentov-tehnicheskogo-vuza> (дата обращения: 01.11.2025).
2. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С.Н. Федин и др. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.
3. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления школьников – М.: Педагогика. 1980. – 240 с.